RASTERS EN ROOSTERS

Hein van Winkel

15 februari 2023

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Rasters tellen met de hand.

inleiding

Dit boek gaat over rasters en roosters en in het bijzonder over rechthoekige rasters en roosters. Onder een **rechthoekig rooster** verstaan we een aantal lijnen die een deel van het platte vlak verdelen in vierkantjes. Een rooster van 13 bij 10 bestaat zodoende uit $13 \cdot 10 = 130$ punten, verbonden door lijnstukjes, zodat er in totaal $12 \cdot 9 = 108$ vierkantjes zijn.
In het rooster markeren we een aantal van de punten. Zo'n gemarkeerd punt noemen we een **stip**. Zo zal het rooster van 13 bij 10 op 130 verschillende manieren één stip kunnen krijgen, er zijn immers 130 punten. Door draaien en spiegelen zijn een aantal van deze 130 roosters in feite gelijk. Er zijn bijvoorbeeld vier roosters met een stip op een hoekpunt. Omdat deze vier na wat spiegelen en draaien niet van elkaar te onderscheiden zijn, spreken we van slechts één **raster** met een stip op de hoek. De vraag is nu hoeveel verschillende rasters er zijn van 13 bij 10 of ook een $(13 \cdot 10)$-rasters met één stip.
Het doel van dit boekje is tenslotte te komen tot formules $a(p,(m,n))$, die het aantal $(m \cdot n)$-rasters met p stippen geven. In de eerste drie hoofdstukken beperken we ons tot rasters, waarbij m≠n is.

permutaties en combinaties

Bij dit soort telproblemen is het handig iets over permutaties en combinaties te weten.

$$\begin{pmatrix} abcd & abdc & acbd & acdb & adbc & adcb \\ bacd & badc & bcad & bcda & bdac & bdca \\ cabd & cadb & cbad & cbda & cdab & cdba \\ dabc & dacb & dbac & dbca & dcab & dcba \end{pmatrix}$$

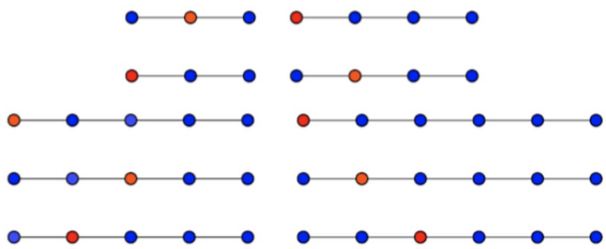
Hierboven staan de 24 **permutaties** van de letters a, b, c, d. Dat het er 24 zijn is niet moeilijk te tellen. Voor de eerste letter heb je de keus uit 4. Daarna is er voor de tweede letter nog de keus uit 3. Samen geeft dit $4 \cdot 3 = 12$ keuzemogelijkheden. Voor de derde letter is er nog een keus uit de 2 overgebeleven. En tot slot is er voor de laatste letter de keus uit 1. Totaal aantal permutaties wordt dus $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. We korten dit soort producten af met 4! en zeggen 4 faculteit.
Het begrip permutatie wordt ook gebruikt voor de afbeelding, waarbij *abcd* bij voorbeeld overgaat in *cbda*. We zien dat b op de tweede plaats blijft en dat a, c, d respectievelijk vervangen worden door c, d, a. Deze afbeelding wordt vaak genoteerd met $(acd) : abcd \rightarrow cbda$.
De groep van deze afbeeldingen wordt vaak aangeduid met S_4. Nog een gebruik van het woord permutatie komt voor wanneer we bijvoorbeeld twee van de vier letters kiezen. We hebben dan, zoals we eerder al zagen $4 \cdot 3 = 12$ mogelijkheden, de 12 permutaties van 2 uit 4. Dit zijn $\{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$.

In het voorbeeld van de vier letters noemen we een deel van de vier letters een **combinatie** van de letters. Zo is het aantal van de combinaties van 2 van de 4 letters gelijk aan 6, de helft van het aantal permutaties van twee van de vier. Handig is om hier een formule voor te hebben. Zo is het aantal combinaties van 3 van de 7 letters a, b, c, d, e, f, g gelijk aan 35. We hebben $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ permutaties. Als we niet op de volgorde letten, dan tellen de 3! volgorden van een drietal letters als één combinatie. We vinden nu dat het aantal combinaties van 3 van de 7 gelijk is aan $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ elementen. Het aantal combinaties wordt ook wel een binomiaalcoëfficiënt genoemd en deze getallen vormen de driehoek van Pascal. De gebruikelijke notatie voor het aantal combinaties van b elementen uit a is

$$\binom{a}{b} = \frac{a(a-1)\cdots(a-(b-1))}{1 \cdot 2 \cdots b}$$

Let er op dat in de teller en de noemer van de breuk altijd evenveel factoren staan.

1 stip op een (m·1)-raster.



Figuur 1.1:

We beginnen gemakkelijk met één stip op een (m·1)-raster. We noemen zo'n raster ook wel een **staaf**. Zie figuur 1.1 , waarin alle oplossingen voor één stip (rood) op een (m·1)-grid staan getekend voor $m = 3, 4, 5, 6$. We zien dus dat het aantal rasters met 1 stip van drie bij één gelijk is aan twee en noteren dit met $a(1, (3, 1)) = 2$. In dezelfde figuur zien we $a(1, (4, 1)) = 2, a(1, (5, 1) = 3, a(1, (6, 1)) = 3$.

Algemene formule voor $a(1, (m, 1))$

We onderscheiden twee gevallen:

m is even. Dan $m = 2k$ voor een geheel getal k. Elk punt links van het midden correspondeert met een symmetrisch gelegen punt rechts van het midden en de roosters met 1 stip zijn derhalve twee aan twee gelijk. In dit geval zijn er dus $\frac{1}{2}m = k$ verschillende rasters.

m is oneven. Dan zij $m = 2k + 1$ voor een geheel getal k. Opnieuw correspondeert elk punt links van het midden met een symmetrisch gelegen punt rechts van het midden. Het aantal dergelijke rasters is k. Bovendien is het rooster met de stip in het midden een raster. Er zijn dus $k + 1 = \frac{1}{2}(m - 1) + 1 = \frac{1}{2}(m + 1)$ verschillende rasters.

In formule:

$$\begin{array}{lcllcl} a(1, (m, 1)) & = & a(1, (2k + 1, 1)) & = & k + 1 & (m = 2k + 1) \text{ oneven} \\ a(1, (m, 1)) & = & a(1, (2k, 1)) & = & k & (m = 2k) \text{ even} \end{array}$$

We kunnen $a(1,(m,1))$ natuurlijk ook in m uitdrukken. Dit geeft als formule:

$$\begin{array}{lclcll} a(1,(m,1)) & = & a(1,(2k+1,1)) & = & \frac{1}{2}(m+1) & (m=2k+1) \text{ oneven} \\ a(1,(m,1)) & = & a(1,(2k,1)) & = & \frac{1}{2}m & (m=2k) \text{ even} \end{array}$$

Omdat we in dit boekje de letters k, l en q standaard zullen gebruiken als de 'helft' van m, n en p zullen ze door elkaar gebruikt worden in formules. Soms is de formule daardoor helderder. Onder 'helft' verstaan we het aantal punten links van het midden. Bij oneven m is de 'helft' k dus gelijk aan de helft van m-1.
Opmerking: $a(1,(m,1))$ =A004526
Soms zijn er verwijzingen in de vorm A met een nummer van 6 cijfers. Dit is dan een verwijzing naar een OEIS-nummer van een rij getallen. OEIS is de afkorting van **the On-line Encyclopedia of Integer Sequences**.

2 stippen op een (m·1)-raster

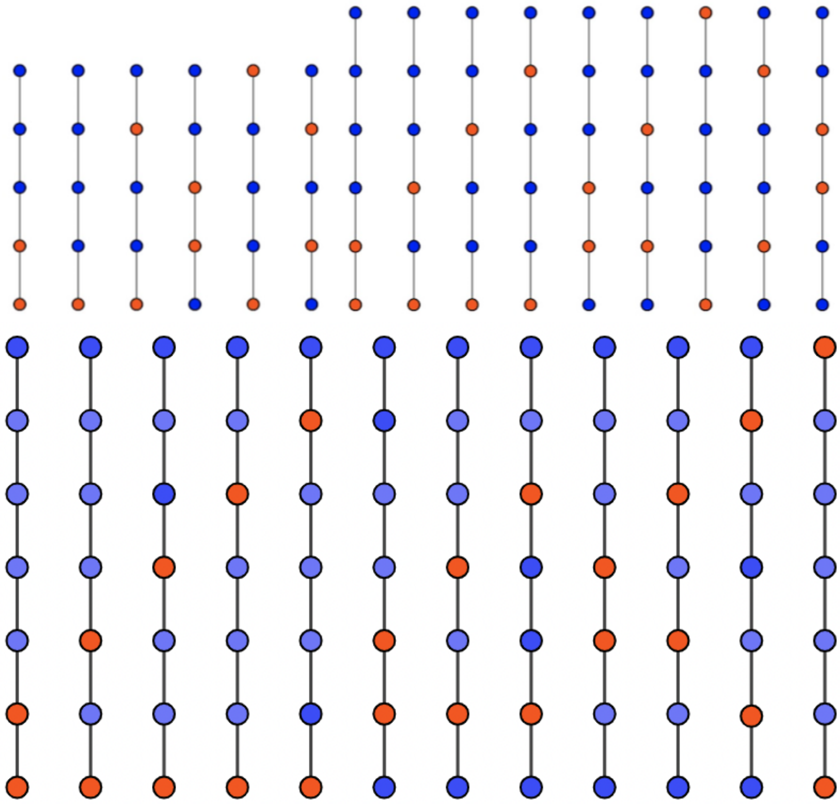
Het volgende, ook nog niet moeilijke, probleem is een staaf van m punten met twee stippen. We krijgen nu te maken met twee nogal verschillende situaties. De beide stippen kunnen bijvoorbeeld aan de ene kant van het midden liggen, maar het derde punt links en het vierde punt rechts van het midden. Het is duidelijk dat deze een symmetrische tegenhanger hebben. Als raster tellen ze maar 1 keer mee. Ook kunnen beide stippen symmetrisch ten opzichte van het midden liggen. In dat geval is er ook maar één raster.

In figuur 1.2 staan de m bij 1 rasters met 2 stippen voor $m = 5, 6, 7$.
Zo blijkt $a(2,(5,1)) = 6$,
$a(2,(6,1)) = 9$ en $a(2,(7,1)) = 12$

Algemene formule voor $a(2,(m,1))$

Als we voor het aantal verschillende rasters alle combinaties van 2 uit m nemen, dan tellen we er een aantal dubbel. We onderscheiden daarom twee soorten combinaties:

- Zelfsymmetrische combinaties, die in tegenstelling tot de volgende maar één keer voorkomen. Bijvoorbeeld het raster met de 2 stippen op begin- en eindpunt. Hier is maar één combinatie voor hetzelfde staafje. Het



Figuur 1.2:

aantal van deze zelfsymmetrische rasters noemen we $a1$ en is gelijk aan het aantal mogelijkheden k om één van beide punten te kiezen uit bijvoorbeeld de linkerhelft van de staaf. Het andere punt ligt door deze keuze immers vast. Dus $a1 = k$.

- Combinaties, die gekoppeld zijn aan een andere gespiegelde combinatie. Bijvoorbeeld: een staaf met stippen op de eerste twee punten is gekoppeld aan de staaf met stippen op de laatste twee punten. Deze twee combinaties tellen als één raster mee. Het aantal van deze asymmetrische rasters noemen we $a2$ en is de helft van alle combinaties van 2 uit m zonder de zelfsymmetrische, ofwel $a2 = \binom{m}{2} - a1$.

Hieruit volgt dat $a(2,(m,1)) = a2 + a1 = \frac{1}{2}(\binom{m}{2} - a1) + a1 = \frac{1}{2}(\binom{m}{2} + a1)$.
Voor even en oneven m krijgt de formule de volgende vormen:
Voor oneven $m = 2k+1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}(m-1)$ volgt
$a(1,(m,1)) = \frac{1}{2}(\frac{m(m-1)}{2\cdot 1} + \frac{1}{2}(m-1)) = \frac{1}{4}(m-1)(m+1) = \frac{1}{4}(m^2-1) = k^2+k$
en voor even $m = 2k$ volgt
$a(1,(m,1)) = \frac{1}{2}(\frac{m(m-1)}{2\cdot 1} + \frac{1}{2}m) = \frac{1}{4}m(m-1+1) = \frac{1}{4}m^2 = k^2$

Samengevat:

$$\begin{array}{llllllll} 2o1 & a(2,(m,1)) & = & \frac{1}{2}(\binom{m}{2}+k) & = & \frac{1}{4}(m^2-1) & = & k^2+k \\ 2e1 & a(2,(m,1)) & = & \frac{1}{2}(\binom{m}{2}+k) & = & \frac{1}{4}m^2 & = & k^2 \end{array}$$

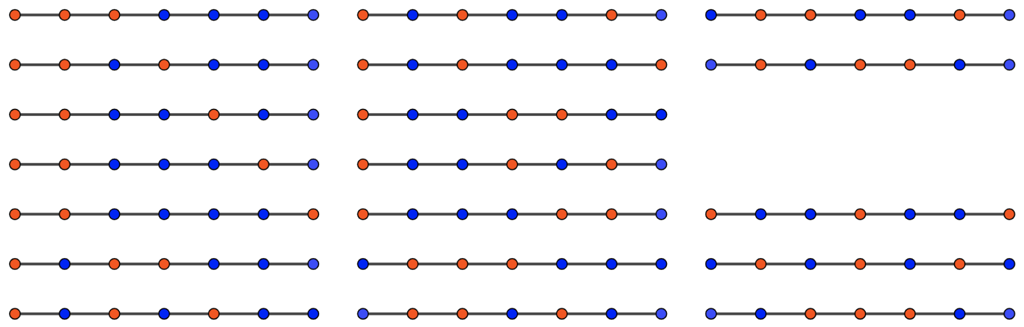
Ter afkorting staat bij de formules voortaan een code zoals 2o1. Hiermee wordt iets aangeduid betreffende de waarde van p, m en n respectievelijk. De aanduiding is de echte waarde, zoals hier 2 en 1, of een o of e het oneven of even zijn van de waarde, zoals hier van m.

Opmerking: $a(2,(m,1)) = A076921$ en vanaf de derde term is het de rij $A002620$

3 stippen op een (m·1)-raster

Het even-oneven zijn van p, m manifesteert zich wederom op een andere manier. Van de drie stippen kan er één samenvallen met het middelste punt van de staaf. De 2 stippen op een (m·1)-raster hadden niet altijd zo'n oneven punt op de staaf.
Nemen we eerst $m = 7$. De zelfsymmetrische combinaties bestaan nu uit 1 stip, die samenvalt met het middelste punt en 1 stip aan de linkerkant, dat gespiegeld is met een punt aan de rechterkant. Hiermee wordt $a1$ gelijk aan

de helft van $7 - 1$ en dat is 3. Het restant van de $\binom{7}{3} = 35$ combinaties komt weer in gelijke paren als een raster voor. Dus $a2 = (35 - 3)/2 = 16$ en $a(3,(7,1)) = a1 + a2 = 3 + 16 = 19$. Deze 19 rasters zijn getekend in figuur 1.3



Figuur 1.3:

Opmerking.
Bij drie stippen moet voor zelfsymmetrie één van de drie stippen met het midden samenvallen. Bij 3 stippen op een staaf van 8 punten zijn daarom geen zelfsymmetrieen aanwezig en is $a(3,(8,1)) = \frac{1}{2}\binom{8}{3} = 28$.

p stippen op een m bij 1 raster

Uit het voorgaande blijkt dat het aantal zelfsymmetrieën afhangt van het even of oneven zijn van de getallen p en m. Daarom de volgende vier gevallen:

- $m = 2k + 1$ is oneven en $p = 2q + 1$ is oneven.
  Het middelste gemarkeerde punt zal moeten samenvallen met het middelste van de m punten. De formule wordt:

$$\text{(oo1) } a(p,(m,1)) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{p} + \binom{k}{q}\right) = \frac{1}{2}\left(\binom{2k+1}{2q+1} + \binom{k}{q}\right)$$

- $m = 2k + 1$ is oneven en $p = 2q$ is even.
  De zelfsymmetrische combinaties kunnen geen gemarkeerd punt in het midden hebben. De formule wordt:

$$\text{(eo1) } a(p,(m,1)) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{p} + \binom{k}{q}\right) = \frac{1}{2}\left(\binom{2k+1}{2q} + \binom{k}{q}\right)$$

- $m = 2k$ is even and $p = 2q + 1$ is oneven. Omdat p oneven is moet bij zelfsymmetrie het middelste gemarkeerde punt met het middelste van alle punten samenvallen. Bij gebrek aan dat laatste middelste punt bij even m wordt de formule bij gebrek aan zelfsymmetrie:

$$\text{(oe1) } a(p,(m,1)) = \frac{1}{2}\binom{m}{p} = \frac{1}{2}\binom{2k}{2q+1}$$

- $m = 2k$ is even en $p = 2q$ is even.
Bij gebrek aan middelste punten moet bij zelfsymmetrie de helft van de gemarkeerde punten bij de linkerhelft van alle punten voorkomen. De formule wordt:

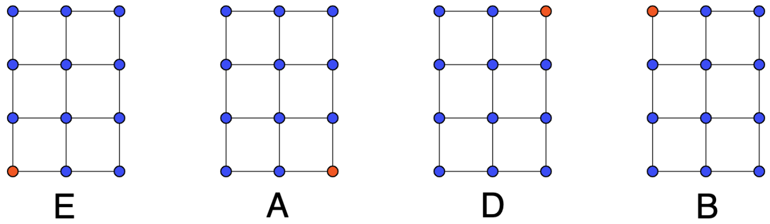
$$\text{(ee1) } a(p,(m,1)) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{p} + \binom{k}{q}\right) = \frac{1}{2}\left(\binom{2k}{2q} + \binom{k}{q}\right)$$

Hoofdstuk 2

Groepen en Dekpunten

In dit hoofdstuk geven we een korte inleiding van het begrip groep en groepswerking op puntenruimten. We kiezen als voorbeeld de werking van de viergroep op een (3·4)-raster.

Groepen



Figuur 2.1: Viergroep {E,A,D,B}

In de figuur zien we vier mogelijke posities van een rooster van 3 bij 4 punten, waarvan één hoekpunt is gemarkeerd. Om van E naar A te komen moeten we spiegelen in de vertikale as. We noemen deze afbeelding a. Om van E naar B te komen spiegelen we in de horizontale as. We noemen deze afbeelding b. Om van E naar D te komen moeten we draaien over 180°. We noemen deze afbeelding d. Tenslotte om van E naar E te komen moeten we niets doen. We noemen deze afbeelding e.

We kunnen ook van A naar B gaan. Dit is de afbeelding d. We noteren dit met $d(A) = B$

Het toepassen van twee afbeeldingen na elkaar noteren we met a·b. We spreken hierbij af dat we eerst b en daarna a toepassen. We noteren dit met (a·b)(A) = a(b(A)) = a(D) = B. of ook abA = aD = B. Wie goed oplet merkt dadelijk op dat van A naar B ook gelijk is aan de draaiing d. Het blijkt dus dat a·b = d. Voor elk tweetal afbeeldingen kunnen we de samenstelling berekenen. We vatten de resultaten samen in een tabel. Controleer dat a·b met a in de voorkolom en b in de bovenste rij inderdaad als samenstelling d geeft.

Tabel 2.1: Viergroep {e,a,b,d}

	e	a	b	d
e	e	a	b	d
a	a	e	d	b
b	b	d	e	a
d	d	b	a	e

Een aantal opmerkingen naar aanleiding van de tabel.

- Als x en y elementen van de viergroep zijn, dan is er voor x·y altijd een uitkomst.
- Voor het element e geldt e·x = x·e = x voor alle elementen x van V. Klinkt logisch. Als je voor of na een afbeelding verder alles op zijn plaats laat, dan voer je die afbeelding uit.
- Bij ieder element x van V geldt dat er een element y is zodat x·y = y·x = e.

Een verzameling met de drie genoemde eigenschappen is een **groep**.
Nog een opmerking. Niet altijd geldt dat x·y = y·x. Bijvoorbeeld: x = a en y = d. Groepen waarin dit voorkomt zijn niet-commutatieve groepen.
Er zijn groepen, waarbij wel altijd geldt, dat x·y = y·x. Dit zijn de abelse groepen, genoemd naar de Noorse wiskundige Niels Abel.

Groepen zijn verder niets bijzonders. Ze komen overal voor, als er maar enige structuur is. Om er even enkele te noemen:

- De gehele getallen, met als samenstelling de gewone optelling. Het gewoon willen optellen veroorzaakte zelfs de ontdekking van nul en negatieve getallen.
- De gehele getallen, met als samenstelling de gewone vermenigvuldiging is geen groep, want het derde regeltje van groepen hierboven klopt niet. Bij het getal 2 is geen getal a, zodat $2 \cdot a = 1$. Ook dit probleem werd opgelost door 'nieuwe' getallen uit te vinden. Met breuken ging alles goed.
- De permutatiegroep van 3 letters (a,b,c). We kunnen deze letters op 6 manieren rangschikken, nl. {abc, acb, bac, bca, cab, cba}. Op gelijke wijze als met de groep in de figuur aan het begin van dit hoofdstuk is gedaan, kan er een tabel gemaakt worden van groepssamenstellingen. Deze heeft weer dezelfde eigenschappen.
- Diverse symmetriegroepen van min of meer regelmatige figuren, waarvan we er vele zullen tegenkomen.

De groep S_4

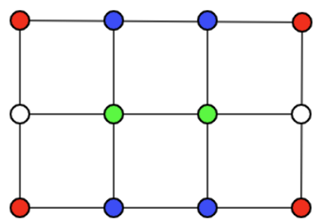
$$\begin{pmatrix} abcd & abdc & acbd & acdb & adbc & adcb \\ bacd & badc & bcad & bcda & bdac & bdca \\ cabd & cadb & cbad & cbda & cdab & cdba \\ dabc & dacb & dbac & dbca & dcab & dcba \end{pmatrix}$$

- In de meeste groepen vormen een aantal elementen op zich eveneens een groep. In de groep S_4 vormt bijvoorbeeld de bovenste regel een deelverzameling die de letter a op zijn plaats laat. Deze 6 elementen vormen een groep, een zogenaamde **ondergroep** van S_4 (controleer de drie voorwaarden voor deze ondergroep.(2)). Deze groep is natuurlijk feitelijk dezelfde groep als de groep S_3, toegepast op de letters (b,c,d).
- In de groep S_4 zit een ondergroep (abcd, badc, dcba, cdab). Dit kunnen we inzien door de letters abcd op volgorde langs een rechthoek te zetten. De elementen van de ondergroep zijn dan precies het resultaat van de afbeeldingen (e,a,b,d) die we tegengekomen zijn bij de viergroep. De viergroep is dus een ondergroep van S_4.
- De orde van een element is het aantal keer dat je een element achter elkaar moet toepassen om het resultaat nietsdoen of **identieke afbeelding** te verkrijgen. Zo is de orde van een spiegeling gelijk aan 2. In een

viergroep is de orde van e gelijk aan 1, en de orde van de elementen a,b,d steeds gelijk aan 2.

- Elk element brengt een groep voort door dit element achter elkaar toe te passen totdat het element e bereikt wordt. Zo is de groep (e, g, g^2, g^3, enz.) de door g voortgebrachte ondergroep. Kies voor g het element (abcd) $\rightarrow$ (bcda). Dan is g^2: (abcd) $\rightarrow$ (cdab), g^3: (abcd) $\rightarrow$ (dabc) en $g^4 = e$. Deze groep is blijkbaar een andere groep van vier elementen als de viergroep, de groep van de rechthoek.

Groepen en banen



Figuur 2.2: Banen $(4 \cdot 3)$

Banen en baanlengte Als we het rooster $4 \cdot 3$ spiegelen en draaien tot alle standen bereikt zijn, ofwel als we de symmetriegroep erop loslaten, dan worden de rode punten naar rode punten verplaatst. Zo ook de blauwe naar blauwe, de witte naar witte, enzovoort. Er is geen werking van de groep waarbij een punt van kleur verandert. We noemen het groepje groene punten een **baan** onder de werking van de groep. De verschillend gekleurde punten in de figuur vormen verschillende banen.
Samenvattend. Als we een ruimte X (ons rooster) en een groep G (de symmetriegroep van X) op X laten werken dan is de **baan** van een punt $x \in X$ gelijk aan de verzameling punten punten {gx} voor alle afbeeldingen $g \in G$ of in formule:

$$\text{Baan van x is de puntverzameling } Gx = \{gx : g \in G\} \qquad (2.1)$$

De **baanlengte** van een punt x is het aantal punten in de baan van x. Notatie $\#(Gx)$.
Tenslotte noemen we de verzameling van alle banen de **banenruimte**,

die we met G/X noteren.
In het voorbeeld zijn de baanlengtes van de punten van X onder de werking van G gelijk aan 2 of 4. Het aantal banen van ons $4 \cdot 3$ rooster is $\#(G/X) = 4$.

Stabilisator Bij sommige afbeeldingen van het rooster blijven punten op hun plaats. Dit leidt tot het begrip stabilisator. Per definitie is de stabilisator van een punt x gelijk aan de (deel)verzameling van alle afbeeldingen die het punt op zijn plaats laat. Een bekende eigenschap is dat deze (deel)verzameling een ondergroep is van G. In de figuur is de stabilisator van een wit punt de afbeelding e en de spiegeling b in de horizontale as ofwel de door b voortgebrachte ondergroep. De stabilisator van een rood punt is alleen de afbeelding e. In formule:

$$\text{Stabilisator van x is de groep } G_x = \{g \in G : gx = x\} \tag{2.2}$$

Dekpunt Dekpunten zijn punten die bij een groepswerking op hun plaats blijven. Soms is er bij een groep geen dekpunt, zoals in ons voorbeeld van het $4 \cdot 3$ rooster. Soms zijn er dekpunten bij ondergroepen, zoals de witte en groene punten bij de werking van de ondergroep (b), de door de horizontale spiegeling voortgebrachte ondergroep.
Bovendien zijn alle punten dekpunt onder de werking van de ondergroep (e).
Omdat een dekpunt op zijn plaats blijft is de baanlengte van een dekpunt gelijk aan 1. De verzameling dekpunten bij de werking van een groep G wordt genoteerd met X^G

Karakter Het karakter van een afbeelding g is het aantal dekpunten $\chi(g) = \#\{x \in X : gx = x\}$ van die afbeelding. Zo zijn in het voorbeeld de karakters van de afbeeldingen (e,a,b,d) respectievelijk gelijk aan (12, 0, 4, 0)

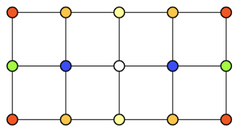
Banenformule Zij G een eindige groep die werkt op een eindige verzameling X, en χ het bijbehorende afbeeldingskarakter. Dan is het aantel G-banen in X gelijk aan

$$\#(G \setminus X) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

Voor het bewijs van de banenformule verwijs ik graag naar introductie in groepentheorie. Dan krijg je vanzelf wat scherpere definities van groepen.

Bij de stap van roosters naar rasters dient nog opgemerkt te worden, dat een raster met 1 stip feitelijk overeenkomt met de banenruimte van de werking van de viergroep G op het rooster X. Voor rasters met meerdere stippen verzinnen we nog een truc.

Voorbeeld. De begrippen en formules passen we nog even toe in een 5·3 rooster.



Figuur 2.3: Banen $(5 \cdot 3)$

- De ruimte X bestaat uit $5 \cdot 3 = 15$ punten.
- De groep $G = \{e, a, b, d\}$ bestaat uit de afbeeldingen, e is identieke afbeelding, a is spiegelen in de vertikale as, b is spiegelen in de horizontale as en d is draaien in het vlak over 180°.
- Baanlengte van het rode hoekpunt $(2, 1)$, rechtsboven is $\#(G(2, 1)) = 4$, terwijl de baanlengte van het witte middelpunt $(0, 0)$ gelijk is aan $\#(G(0, 0)) = 1$.
- De karakters van de vier afbeeldingen zijn $\chi(e) = \#\{x \in X : ex = e\} = 15$, $\chi(a) = 3$, $\chi(b) = 5$ en $\chi(d) = 1$.
- Het aantal banen $\#(G \setminus X)$ is

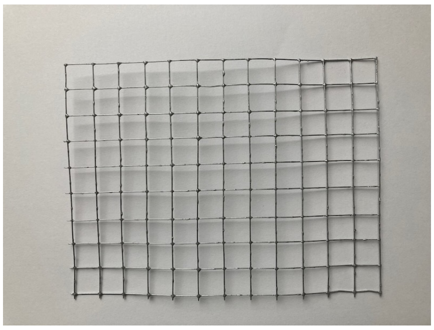
$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{g} \chi(g) = \frac{\chi(e) + \chi(a) + \chi(b) + \chi(d)}{4} = \frac{15 + 3 + 5 + 1}{4} = 6 \tag{2.3}$$

Opgave. Geef een formule voor $a(p, (m, n))$, voor $p = 1$ en voor $p = 2$.

Hoofdstuk 3

Formules voor a(p,(m,n))

1 stip op een (m·n) raster ($m \neq n$)



Figuur 3.1: rechthoekig grid van 13 bij 10

We beantwoorden eerst de opgave aan het eind van het vorige hoofdstuk. We kiezen m als het aantal punten op een horizontale zijde en n als het aantal punten op een vertikale zijde en gaan er nog steeds vanuit dat m≠n is, zoals tot nog toe stilzwijgend steeds is aangenomen. Verder onderscheiden we vier gevallen in verband met het even of oneven zijn van m en n. In elk van de gevallen geldt, onafhankelijk van het even of oneven zijn: (1) De ruimte X bestaat uit m·n punten. (2) De groep G = {e,a,b,d} bestaat uit de afbeeldingen, e is identieke afbeelding, a is spiegelen in de vertikale as, b is spiegelen in de horizontale as en d is draaien in het vlak over 180°. (3) $\chi(e) = mn$.

m=2k en n=2l zijn beide even. Dan liggen er geen punten op de symmetrieassen en het middelpunt van draaiien ontbreekt. Dus is :

$\chi(a) = \chi(b) = \chi(d) = 0 \Rightarrow$.

$a(1,(m,n)) = \frac{1}{\#(G)} \sum_g \chi(g) = \frac{\chi(e)+\chi(a)+\chi(b)+\chi(d)}{4} = \frac{2k\cdot 2l+0+0+0}{4} = kl$

m=2k is even en n=2l+1 is oneven . Dan liggen er geen punten op de vertikale symmetrieas en bovendien ontbreekt het draaimiddelpunt. Er liggen wel m punten op de horizontale symmetrieas. Dus is : $\chi(a) = \chi(d) = 0$ en $\chi(b) = m \Rightarrow$
$a(1,(m,n)) = a(1,(2k,2l+1)) = \frac{1}{4}(mn+m) =$
$\frac{1}{4}(2k\cdot(2l+1)+2k) = \frac{1}{4}(4kl+4k) = kl+k$

m=2k+1 is oneven en n=2l is even. Met verwisselen van m en n komt er
$\chi(b) = \chi(d) = 0$ en $\chi(a) = n \Rightarrow$
$a(1,(m,n)) = a(1,(2k+1,2l)) = \frac{1}{4}(mn+n) =$
$\frac{1}{4}((2k+1)\cdot 2l+2l) = \frac{1}{4}(4kl+4l) = kl+l$

m=2k+1 en n=2l+1 zijn beide oneven. Alle punten op beide symmetrieassen zijn aanwezig. Dus is : $\chi(a) = n, \chi(b) = m, \chi(d) = 1 \Rightarrow$
$a(1,(m,n)) = a(1,(2k+1,2l+1)) = \frac{1}{4}(mn+n+m+1) =$
$\frac{1}{4}((2k+1)\cdot(2l+1)+2l+1+2k+1+1) = \frac{1}{4}(4kl+4l+4k+4) =$
$kl+k+l+1 = (k+1)(l+1)$

Samengevat:

$$\begin{array}{llll}
(1oo) & a(1,(m,n)) & = kl+k+l+1 & = (k+1)(l+1) \\
(1oe) & a(1,(m,n)) & = kl+l & = (k+1)l \\
(1eo) & a(1,(m,n)) & = kl+k & = k(l+1) \\
(1ee) & a(1,(m,n)) & = kl &
\end{array}$$

2 stippen op een m·n raster (m≠n)

Het systeem dekpunten tellen blijft hetzelfde. Alleen wordt het begrip punt vervangen door 2-punt. De ruimte X bestaat nu niet langer uit losse punten, maar uit 2-punten. Het aantal 2-punten is gelijk aan het aantal combinaties van 2 uit (mn) ofwel $\binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1}$. En dit aantal is meteen gelijk aan het karakter $\chi(e)$. De karakters van de andere symmetrieen van X zijn lastiger te bepalen. Daarom bekijken we eerst nog eens het (13·10)-raster.

- De ruimte X bestaat uit alle 2-punten van het rooster, die onder de symmetriegroep van X, de inmiddels welbekende viergroep, de dekpunten van e zijn. We zullen ze voortaan 2-dekpunten noemen.
  $\chi(e) = \binom{13\cdot 10}{2} = \binom{130}{2} = \frac{130\cdot 129}{2\cdot 1} = 8385.$
- Als een 2-punt 2-dekpunt is van de spiegeling in de vertikale as zijn er twee soorten mogelijkheden: (1) beide punten van het 2-dekpunt liggen op de spiegelas of (2) beide punten van het 2-dekpunt zijn elkaars spiegelbeeld. Voor de eerste mogelijkheid is het aantal 2-dekpunten gelijk aan $\binom{10}{2} = 45$. Voor de tweede mogelijkheid wordt elk punt uit het linkerhalfvlak gekoppeld aan zijn spiegelbeeld in het rechterhalfvlak, waarbij de spiegelas niet meetelt. Het aantal van deze 2-dekpunten is $(13-1)/2 \cdot 10 = 60$.
  $\chi(a) = 45 + 60 = 105.$
- Als een 2-punt 2-dekpunt is van de spiegeling in de horizontale as, dan vervalt de mogelijkheid (1). Het aantal 2-dekpunten via mogelijkheid (2) is $5 \cdot 13 = 65$.
  $\chi(b) = 65.$
- Bij de draaiing is er bij elk punt een tweede punt, dat draaisymmetrisch is. Het aantal 2-dekpunt is dus gelijk aan de helft van alle punten of $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65$.
  $\chi(d) = 65.$
- $a(2,(13,10)) = \frac{1}{4}(8385 + 105 + 65 + 65) = 8620/4 = 2155$

Dit kunnen we ook zonder veel problemen vertalen naar een algemene formule. We onderscheiden 3 gevallen voor m en n.

1. m=2k en n=2l zijn beide even.
   - $\chi(e) = \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1} = 2kl(4kl-1)$
   - $\chi(a) = \frac{1}{2}mn = 2kl$
   - $\chi(b) = \frac{1}{2}mn = 2kl$
   - $\chi(d) = \frac{1}{2}mn = 2kl$
   - $a(2,(m,n)) = \frac{1}{4}[\binom{mn}{2} + \frac{3}{2}mn] = \frac{1}{2}kl(4kl+2) = kl(2kl+1)$
2. m=2k is even en n=2l+1 is oneven. Verschillende pariteit hoeven we maar één keer te beschouwen. Verwissel m en n, wanneer de pariteit andersom is.

- $\chi(e) = \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}(m^2n^2 - mn)$
- $\chi(a) = \frac{1}{2}mn$
- $\chi(b) = \binom{m}{2} + \frac{1}{2}m(n-1)$
- $\chi(d) = \frac{1}{2}mn$
- $a(2,(m,n)) =$
  $\frac{1}{4}[\frac{1}{2}(m^2n^2 - mn) + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{2}m(n-1) + \frac{1}{2}mn] =$
  $2k^2l^2 + 2k^2l + k^2 + kl$

3. m en n zijn beide oneven.

- $\chi(e) = \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}(m^2n^2 - mn)$
- $\chi(a) = \binom{n}{2} + \frac{1}{2}n(m-1) = \frac{1}{2}(n^2 + mn - 2n)$
- $\chi(b) = \binom{m}{2} + \frac{1}{2}m(n-1) = \frac{1}{2}(m^2 + mn - 2m)$
- $\chi(d) = \frac{1}{2}(mn-1)$
- $a(2,(m,n)) =$
  $\frac{1}{8}(m^2n^2 - mn + n^2 + mn - 2n + m^2 + mn - 2m + mn - 1) =$
  $2k^2l^2 + 2k^2l + 2kl^2 + k^2 + 3kl + l^2 + k + l$

Samengevat:

$$
\begin{array}{lll}
(2oo) & a(2,(m,n)) & = 2k^2l^2 + 2k^2l + 2kl^2 + k^2 + 3kl + l^2 + k + l \\
(1oe) & a(2,(m,n)) & = 2k^2l^2 + 2k^2l + k^2 + kl \\
 & & = k(2kl^2 + 2kl + k + l) \\
(1eo) & a(2,(m,n)) & = 2k^2l^2 + 2kl^2 + kl + l^2 \\
 & & = l(2k^2l + 2kl + k + l) \\
(1ee) & a(2,(m,n)) & = 2k^2l^2 + kl \\
 & & = kl(2kl + 1)
\end{array}
$$

p stippen op een (m·n)-raster

Na de voorbereidende beschouwingen in dit hoofdstuk is het niet moeilijk meer om de algemene formule voor a(p,(m,n)) af te leiden.
Om te beginnen enkele vaste notaties bij even en oneven:

- p even dan is $p = 2 \cdot q$
- p oneven dan is $p = 2 \cdot q + 1$
- m even dan is $m = 2 \cdot k$

- m oneven dan is $m = 2 \cdot k + 1$
- n even dan is $n = 2 \cdot l$
- n oneven dan is $n = 2 \cdot l + 1$

De symmetriegroep van het rechthoekig rooster wordt beschreven door de viergroep. In het bijzonder is

- e de identieke afbeelding.
- a de spiegeling in de vertikale as van lengte n.
- b de spiegeling in de horizontale as van lengte m.
- d de draaiing om het middelpunt over 180° in het vlak van de rechthoek.

Bij de volgende onderverdeling gebruiken we afkortingen als oeo. Met oeo geven aan, dat p, m, n respectievelijk oneven, even en oneven zijn. Ten overvloede is voor even p, en wel p = 2 een uitdrukking in (k,l) toegevoegd.

3.0.1 eee

$\chi(e) = \binom{mn}{p} = \binom{4kl}{2q}$

$\chi(a) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} = \binom{2kl}{q}$

$\chi(b) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} = \binom{2kl}{q}$

$\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} = \binom{2kl}{q}$

$$a(p,(m,n)) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + 3\binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}\right) = \frac{1}{4}\left(\binom{4kl}{2q} + 3\binom{2kl}{q}\right) \qquad (3.1)$$

3.0.2 eeo

$\chi(e) = \binom{mn}{p} = \binom{2k(2l+1)}{2q}$

$\chi(a) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} = \binom{k(2l+1)}{q}$

$\chi(b) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i} = \sum_{i=0}^{q} \binom{2k}{2i}\binom{2kl}{q-i}, i \leq k$

$\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} = \binom{k(2l+1)}{q}$

$$a(p,(m,n)) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + 2\binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} + \sum_{i=0}^{q}\binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i}\right) \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\binom{4kl}{2q} + 2\binom{k(2l+1)}{q} + \sum_{i=0}^{q}\binom{2k}{2i}\binom{2kl}{q-i}\right)$$

3.0.3 eoo

$\chi(e) = \binom{mn}{p} = \binom{(2k+1)(2l+1)}{2q}$

$\chi(a) = \sum_{i=0}^{q} \binom{n}{2i}\binom{nk}{q-i} = \sum_{i=0}^{q} \binom{2l}{2i}\binom{k(2l+1)}{q-i}, i \leq l$

$\chi(b) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i} = \sum_{i=0}^{q} \binom{2k}{2i}\binom{(2k+1)l}{q-i}, i \leq k$

$\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}(mn-1)}{\frac{1}{2}p} = \binom{2kl+k+l}{q}$

$$a(p,(m,n)) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{q}\binom{n}{2i}\binom{nk}{q-i} + \sum_{i=0}^{q}\binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i} + \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}\right) \tag{3.3}$$

3.0.4 oee

$\chi(e) = \binom{mn}{p} = \binom{4kl}{2q+1}$

$\chi(a) = 0$

$\chi(b) = 0$

$\chi(d) = 0$

$$a(p,(m,n)) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \binom{kn}{q} + \binom{ml}{q} + \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}(p-1)}\right) \tag{3.4}$$

3.0.5 ooe

$\chi(e) = \binom{mn}{p} = \binom{(2k+1)l}{2q+1}$

$\chi(a) = \sum_{i=0}^{q} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i}$

$\chi(b) = 0$

$\chi(d) = 0$

$$a(p,(m,n)) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{q} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i}\right) \tag{3.5}$$

3.0.6 ooo

$\chi(e) = \binom{mn}{p} = \binom{(2k+1)(2l+1)}{2q}$

$\chi(a) = \sum_{i=0}^{q} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i}$

$\chi(b) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{ml}{q-i}$

$\chi(d) = \binom{mn-1}{p-1} = \binom{2kl+k+l}{2q}$

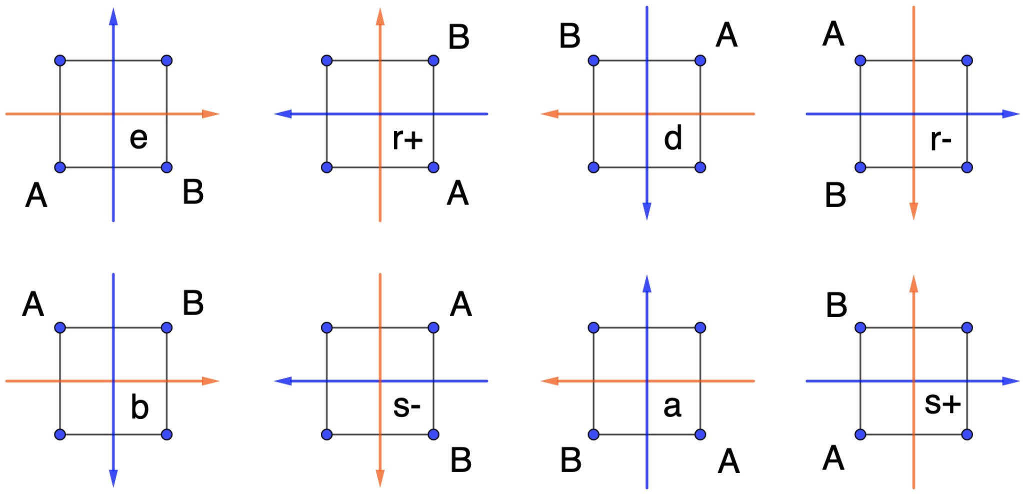
$$a(p,(m,n)) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{q} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i} + \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{ml}{q-i} + \binom{mn-1}{p-1}\right) \tag{3.6}$$

Voor p = 3 vinden we:

$$\left(\begin{array}{ll}
(3oo) & \frac{8}{3}k^3l^3+\frac{1}{3}k^3+kl^2+\frac{1}{3}l^3-\frac{1}{2}k^2-\frac{7}{6}kl-\frac{1}{2}l^2+\frac{1}{6}k+\frac{1}{6}l+\frac{1}{4} \\
 & =\left(\frac{1}{12}\right)\cdot(32k^3l^3+4k^3+12kl^2+4l^3-6k^2-14kl-6l^2+2k+2l+3)) \\
(3oe) & \frac{8}{3}k^3l^3+4k^2l^3-2k^2l^2+2kl^3+\frac{2}{3}l^3+\frac{1}{3}kl-l^2+\frac{1}{3}l \\
 & \left(\frac{1}{3}\right)\cdot l\cdot(8k^3l^2+12k^2l^2-6k^2l+6kl^2+2l^2+k-3l+1) \\
(3ee) & \frac{8}{3}k^3l^3-2k^2l^2+\frac{11}{3}kl \\
 & =\frac{1}{6}kl(16k^2l^2-12kl+11)
\end{array}\right)$$

Hoofdstuk 4

Formules voor a(p,(m,m))



Figuur 4.1: vierkantgroep

In dit artikel is tot nog toe gekeken naar rechthoekige rasters met m≠n. Er resteert nog het verhaal over vierkante rasters. Dan is de viergroep niet meer de groep van symmetrieën. Het vierkant heeft meer symmetrie en daarom eerst iets over de vierkantgroep.

In de figuur herkennen we de afbeeldingen e,a,b,d van de viergroep.
Er zijn bij het vierkant nog twee draaiingen over 90°, waarbij r+,r- respectievelijk in positieve richting (tegen de wijzers van de klok in) en in negatieve richting (met de wijzers van de klok mee) zijn.

Bovendien zijn er nog twee spiegelingen s+,s- in respectievelijk de positief gerichte diagonaal en de negatief gerichte diagonaal.

Voor het aantal vierkante rasters zullen we nu dus moeten zoeken naar de dekpunten van deze acht afbeeldingen. Bovendien zullen we nu rekening moeten houden met het even zijn van p en m. Bij p gaat het niet alleen om het even/oneven zijn, maar zelfs of p een viervoud plus 0 of 1 of 2 of 3 is.

Enkele opmerkingen vooraf.

- De werking van de vierkantgroep verdeelt het vierkant in banen van lengte 1, 4 en 8.
- Wanneer m even is, dan zijn de symmetrie-assen afwezig. Als p=1 dan zijn er alleen 1-punten dekpunt bij de diagonale spiegelingen. Het aantal verschillende grids is dan $a(1,(m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{1} + 2\binom{m}{1}) = \frac{1}{8}(m^2 + 2m)$
- Omdat de draaiingen over een kwartslag van 90° steeds vier punten nodig heeft in een p-dekpunt kiezen we nu voor p viervouden plus 0, 1, 2, 3 en schrijven p=4t, p=4t+1, p=4t+2, p=4t+3
- Bij de onderverdeling van het vierkante raster met p stippen, gebruiken we de afkortingen 0o, 1o, 2o, 3o, 0e, 1e, 2e, 3e waarbij 1e staat voor p=4t+1 en m=2k is even.

0e, 2e

$\chi(e) = \binom{m^2}{p}$

$\chi(a) = \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p}$

$\chi(b) = \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p}$

$\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p}$

$\chi(r+) = \binom{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}p}$, als p een viervoud is; anders is $\chi(r+) = 0$.
$(3,1),(-1,3),(-3,-1),(1,-3)$ is een voorbeeld van een 4-dekpunt van r+. Een p-dekpunt zal dus moeten bestaan uit een veelvoud van 4 punten, waarvan er steeds 3 samenhangen met een punt in het eerste kwadrant.

Alleen voor een viervoud p=4t heeft r+ dekpunten bij even m.

$\chi(r-) = \binom{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}p}$, als $p \equiv 4$; anders is $\chi(r-) = 0$.

$\chi(s+) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{\frac{1}{2}(p-2i)} = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i}\binom{k(m-1)}{q-i}$

$\chi(s-) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{\frac{1}{2}(p-2i)} = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i}\binom{k(m-1)}{q-i}$

Samengevat:

$$\begin{array}{lll} (0e) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 3\binom{2k^2}{2t} + 2\binom{k^2}{t} + 2\sum_{i=0}^{min(2t,k)} \binom{m}{2i}\binom{k(m-1)}{2t-i})) \\ (2e) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 3\binom{2k^2}{2t+1} + 2\sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i}\binom{k(m-1)}{2t+1-i})) \end{array}$$

0o, 2o

$\chi(e) = \binom{m^2}{p}$

$\chi(a) = \sum_{i=o}^{q} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{p/2-i}$

$\chi(b) = \sum_{i=o}^{q} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{p/2-i}$

$\chi(d) = \sum_{i=o}^{q} \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{p/2}$

$\chi(r+) = \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{\frac{1}{4}p}$, als p een viervoud is.
$(3,1), (-1,3), (-3,-1), (1,-3)$ is een voorbeeld van een 4-dekpunt van r+. Een p-dekpunt zal dus moeten bestaan uit een veelvoud van 4 punten, waarvan er 3 samenhangen met een punt in het eerste kwadrant. Alleen als p een viervoud is heeft r+ dekpunten bij oneven m

$\chi(r-) = \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{\frac{1}{4}p}$, als p een viervoud is; anders is $\chi(r-) = 0$.

$\chi(s+) = \sum_{i=o}^{q} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{p/2-i}$

$\chi(s-) = \sum_{i=o}^{q} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{p/2-i}$

Samengevat:

$$\begin{array}{lll} (0o) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + \binom{(m^2-1)/2}{2t} + 2\binom{(m^2-1)/4}{t} + 4\sum_{i=0}^{min(2t,k)} \binom{m}{2i}\binom{k(m-1)}{2t-i})) \\ (2e) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 3\binom{(m^2-1)/2}{2t+1} + 4\sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i}\binom{k(m-1)}{2t+1-i})) \end{array}$$

1e, 3e

$\chi(e) = \binom{m^2}{p}$

$\chi(a) = 0$
Het oneven zijn van p verhindert de constructie van een dekpunt, omdat er geen punten op symmetrieassen liggen.

$\chi(b) = 0$

$\chi(d) = 0$
Een lijnen door draaisymmetrische punten moeten door het middelpunt van het vierkant gaan. Er is geen middelpunt.

$\chi(r+) = 0.$

$\chi(r-) = 0.$

$\chi(s+) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{p/2-i}$

$\chi(s-) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{p/2-i}$

Samengevat:

$$\begin{array}{lll} (1e) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(2t,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{k(m-1)}{2t-i}) \\ (3e) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{k(m-1)}{2t+1-i}) \end{array}$$

1o, 3o

$\chi(e) = \binom{m^2}{p}$

$\chi(a) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{q-i}$

$\chi(b) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{q-i}$

$\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{q}$

$\chi(r+) = \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{\frac{1}{4}(p-1)}$ voor p is viervoud plus 1. Voor p is een viervoud -1 is $\chi(r+) = 0$

$\chi(r-) = \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{\frac{1}{4}(p-1)}$ voor p is viervoud plus 1. Voor p is een viervoud -1 is $\chi(r-) = 0$

$\chi(s+) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{q-i}$

$\chi(s-) = \sum_{i=0}^{q} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{q-i}$

Samengevat:

$$\begin{array}{lll} (1o) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 4\sum_{i=0}^{min(2t,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{k(m-1)}{2t-i}) + \sum_{i=0}^{min(2t,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{(m^2-1)/2}{2t-i}) \\ & & +2\binom{(m^2-1)/4}{t} \\ (3o) & a(p,(m,m)) & = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 4\sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{k(m-1)}{2t+1-i}) \end{array}$$

Formule overzicht

oo1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2}\cdot(\binom{m}{p} + \binom{k}{q})$

oe1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2}\cdot(\binom{m}{p})$

eo1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2}\cdot(\binom{m}{p} + \binom{k}{q})$

ee1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2}\cdot(\binom{m}{p} + \binom{k}{q})$

ooo $a(p,m,n) = \frac{1}{4}\cdot(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{ml}{q-i} + \binom{(mn-1)/2}{q})$

ooe $a(p,m,n) = \frac{1}{4}\cdot(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i})$

oeo $a(p,m,n) = \frac{1}{4}\cdot(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{ml}{q-i})$

oee $a(p,m,n) = \frac{1}{4}\cdot\binom{mn}{p}$

eoo $a(p,m,n) = \frac{1}{4}\cdot(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i}\binom{kn}{q-i} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i} + \binom{(mn-1)/2}{q})$

eoe $a(p,m,n) = \frac{1}{4}\cdot(\binom{mn}{p} + 2\cdot\binom{ml}{q} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i}\binom{kn}{q-i})$

eeo $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + 2 \cdot \binom{kn}{q} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i})$

eee $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + 3 \cdot \binom{2kl}{q})$

0o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + \binom{2k(k+1)}{q} + 2 \cdot \binom{k^2+k}{t} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i}\binom{2k^2+k}{q-i})$

1o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{2k^2+k}{q-i} + \binom{2k(k+1)}{q} + 2 \cdot \binom{k^2+k}{t})$

2o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + \binom{2k^2+2k}{2t+1} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{2k^2+k}{2t-i})$

3o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + \binom{2k(k+1)}{2t+1} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{2k^2+k}{2t-i})$

0e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 3 \cdot \binom{2k^2}{q} + 2 \cdot \binom{k^2}{t} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i}\binom{2k^2-k}{q-i})$

1e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{2k^2-k}{q-i})$

2e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 3 \cdot \binom{2k^2}{2t+1} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i}\binom{2k^2-k}{2t+1-i})$

3e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{p} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(2t+1,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{2k^2-k}{2t+1-i})$